Résumé - mécanique de Lagrange

1) Principe de d'Alembert

-contraintes sur une hyper-surface dans l'espace des configurations

$$f\left(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t\right) = 0$$

(contrainte holonôme)

-déplacements virtuels tangents à l'hyper-surface vs. contraintes

$$\sum_i \frac{\partial f_j}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

-forces qui imposent les contraintes ne travaillent pas sur ces déplacements

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$$

Où le Lagrangien L=T-V;

T: énergie cinétique

V: énergie potentielle ne dépendant pas des vitesses

Résumé - mécanique de Lagrange

2) Principe d'Hamilton / de moindre action (Euler-Lagrange)

-Intégrale d'action

$$S[\{q_i(t)\}] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, t)\mathrm{d}t$$

-"L'action est extrême sur les trajectoires physiques"

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$$

-Le principe de moindre action permet d'inclure les contraintes de manière systématique via le théorème des extremums liés

Minimiser F(x,y) sous la contrainte f(x,y)=0 est équivalent à minimiser

$$H(x, y, \lambda) = F(x, y) + \lambda f(x, y)$$

Résumé - mécanique de Lagrange

2) Principe d'Hamilton / de moindre action (Euler-Lagrange)

-Contraintes holonômes

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_j \lambda_j \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}, & i = 1, \ldots, 3N \\ f_j(x_1, \ldots, x_{3N}, t) = 0, & j = 1, \ldots, k. \end{cases}$$

-Forces de contraintes

$$R_i = \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i}$$

-Contraintes plus générales

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_j \lambda_j a_i^j, & i = 1, \ldots, 3N \\ \sum_{i=1}^{3N} a_i^j \dot{x}_i + a_0^j = 0, & j = 1, \ldots, k. \end{cases}$$